

マ스로フ指数入門*¹

新居俊作 (九州大学) 述

記 山添祥太郎 山中祥五 川原田茜 関坂歩幹

*¹ このノートは、2016年8月25日京都大学で行われた『語ろう「数理解析」セミナー』での新居俊作氏のレクチャーに基づき、山添祥太郎さん(京都大学大学院 矢ヶ崎研究室)、山中祥五さん(京都大学大学院 矢ヶ崎研究室)、川原田茜さん(京都教育大学教育学部)、関坂歩幹さん(明治大学 MIMS)のご協力のもと作成したものです。(括弧内の所属は当時の所属です)

マスロフ指数入門

新居俊作 述

記 山添祥太郎 山中祥五 川原田茜 関坂歩幹

1 Introduction

1次元の Sturm-Liouville 作用素の固有値問題

$$\begin{cases} -p'' + f(x)p = \lambda p & \text{on } (-1, 1), \\ p(\pm 1) = 0 \quad \text{or} \quad p'(\pm 1) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

を考える。但し、 $f(x)$ は実数値連続関数、 $' = \frac{d}{dx}$ である。固有値は実数なので、 $p(x)$ が実数値関数としても一般性は失われない。(1) を 1 階の方程式に書き直すと、

$$\begin{cases} p' = q, \\ q' = (f(x) - \lambda)p \end{cases} \quad (2)$$

となる。極座標で書くと、

$$\begin{cases} r' = (1 - \lambda + f(x))r \sin \theta \cos \theta, \\ \theta' = 1 + (\lambda - f(x) - 1) \sin^2 \theta \end{cases} \quad (3)$$

となる。 θ の式は r に依存しない。また、

$$\begin{aligned} p(\pm 1) = 0 &\Leftrightarrow \theta(\pm 1) = (\text{奇数}) \times \frac{\pi}{2} \\ p'(\pm 1) = 0 &\Leftrightarrow \theta(\pm 1) = (\text{偶数}) \times \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

が成り立つ。よって、 θ のみを考えれば良い。ここで θ の式を解いてから、 r の式に代入してもいいが、そうではなくて一度に考えてみる。(3) は原点を通る同一直線上を初期値とする解は常に同一直線上にあることを意味する。直線を初期値に与えたら直線のまま変化する (図 1)。そこで直線全体を考える。すると、(3) は実射影直線 \mathbb{RP}^1 (図 2) 上の方程式を定め、それが θ の式である。

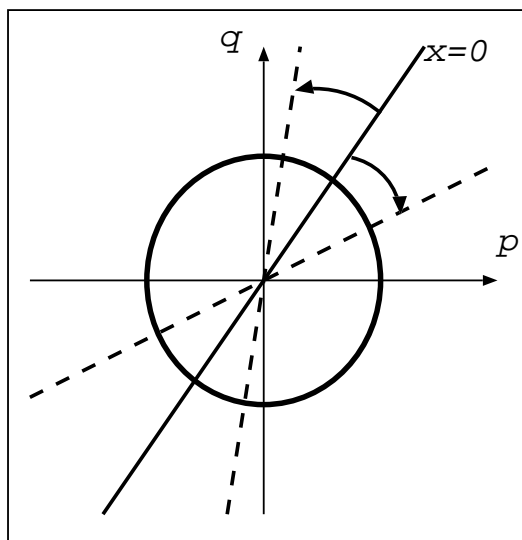


図 1: 微分方程式の意味. 直線を初期値にすると直線のまま動く.

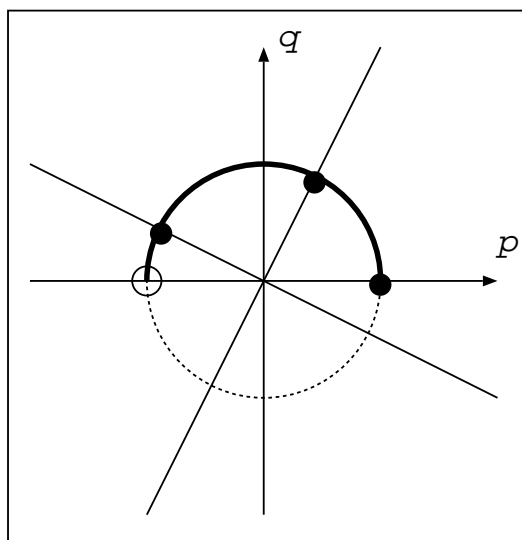


図 2: \mathbb{RP}^1 の定義. 原点を通る直線を同一視する. 代表元が単位円の上部分として取れる. ただし, $(1, 0)$ と $(-1, 0)$ は同一視することに注意.

(3) の θ の式は λ について単調増加である. $x = -1$ での初期値 $\theta(-1)$ を $x = -1$ での境界条件を満たすように固定して, λ をある λ_0 から λ_1 まで動かした時の $\theta(1)$ の値が \mathbb{RP}^1 を何回周るかで $[\lambda_0, \lambda_1]$ 中の固有値の数が分かる.

これを n 次元に拡張する. $p(x)$ が n 次元ベクトル値関数の場合

$$\begin{cases} -p'' + M(x)p = \lambda p & \text{on } (-1, 1), \\ \text{B.C.} \end{cases}$$

を考える. ここで $M(x)$ は n 次対称行列である. しかし, 同じことはできない. なぜなら $\pi_1(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}_2, n \geq 2$ となるからである.

実際, $n = 2$ の場合を考えてみる. まず, $\mathbb{R}P^2$ は図 3 のようになる. 単位球面を上から見ると図 4 のようになる.

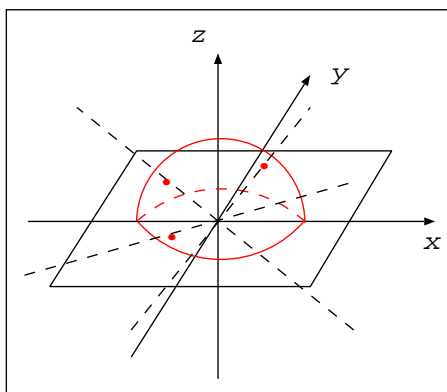


図 3: $\mathbb{R}P^2$ の定義. 原点を通る直線を同一視する. 代表元が単位球面の上半分として取れる.

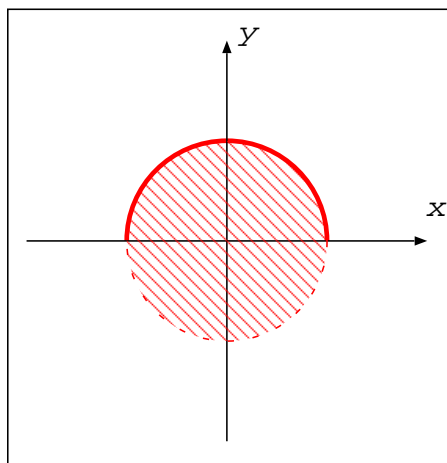


図 4: $\mathbb{R}P^2$ を上から見た図. $\mathbb{R}P^1$ のときのように xy 平面上では向かい合わせにある点は同一視している.

(1, 0, 0) から (-1, 0, 0) に周るもので一周になっているが (図 5), さらに一周まわると単位元とホモトピックになる (図 6). 単位球を上から見ていることに注意. よって, 確かに $\pi_1(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}_2, n \geq 2$ である. したがって, 同じことをしても固有値のパリティ (偶数個か奇数個か) しか分からない.

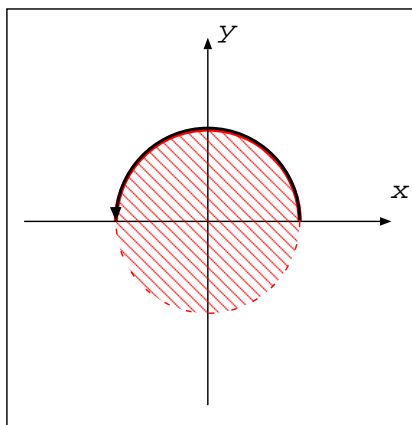


図 5: 1 周分

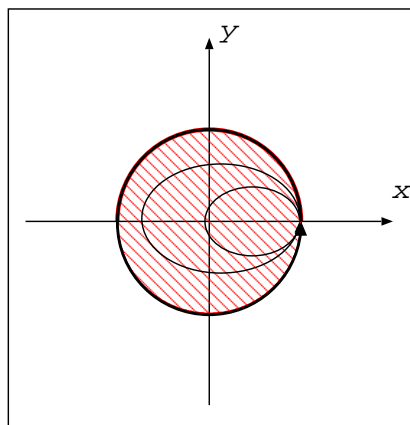


図 6: 2 周すると単位元になる

方程式を一階に書き直すと

$$\begin{cases} p' = q, \\ q' = (M(x) - \lambda I_n)p, \end{cases} \quad (p, q) \in \mathbb{R}^{2n} \quad (4)$$

となる. この境界値の集合は n 次元部分空間なので, \mathbb{R}^{2n} 内の n 次元部分空間の集合 (Graßmann 多様体) を考えるのが自然であるが, これも同じ理由でダメである. やはりパリティしか分からない.

そこでもう少し構造が必要になる.

$$H(q, p) = \frac{1}{2}\{|q|^2 + {}^t p(\lambda I_n - M(x))p\}$$

として (4) は Hamilton 方程式の形で書ける. すなわち,

$$\begin{cases} \dot{p} = \frac{\partial H}{\partial q}, \\ \dot{q} = -\frac{\partial H}{\partial p}. \end{cases}$$

天下りの的であるが, ここで $(p_1, q_1), (p_2, q_2) \in \mathbb{R}^{2n}$ に対して Symplectic 形式を

$$\sigma((p_1, q_1), (p_2, q_2)) := p_1 \cdot q_2 - p_2 \cdot q_1$$

と定めると, (4) は σ を保存する. 実際, $\sigma((p_1(t), q_1(t)), (p_2(t), q_2(t)))' = 0$ となる. この構造を使う.

2 マスロフ指数

2.1 Lagrange-Graßmann 多様体

定義 1. $(\mathbb{R}^{2n}, \sigma)$ を Symplectic ベクトル空間と呼ぶ. Symplectic ベクトル空間の n 次元部分空間 L で, σ を L に制限したものがゼロ ($\sigma|_L = 0$) となるものを Lagrange 部分空間と呼ぶ.

λ を \mathbb{R}^{2n} の部分空間とすると,

$$\lambda^\sigma := \{y' \in \mathbb{R}^{2n} \mid \sigma(y, y') = 0, \forall y \in \lambda\}$$

とすると

$$\lambda \text{ が Lagrange 部分空間} \iff \lambda^\sigma = \lambda$$

となる. つまり σ が消える maximal なものが Lagrange 部分空間である.

定義 2.

$$\begin{aligned} 2 \text{ つの Lagrange 部分空間 } \lambda \text{ と } \lambda' \text{ が横断的} &\stackrel{\text{def}}{\iff} \lambda \cap \lambda' = \{0\} \\ &\iff \lambda + \lambda' = \mathbb{R}^{2n}. \end{aligned}$$

本稿の主題である Lagrange-Graßmann 多様体を導入する. $(\mathbb{R}^{2n}, \sigma)$ は Symplectic ベクトル空間, Λ は \mathbb{R}^{2n} の Lagrange 部分空間全体とする. このとき, Λ に多様体の構造を入れたものを Lagrange-Graßmann 多様体と呼ぶ. Lie 群の理論で多様体の構造は入るが, 実際に局所座標系を考える.

2.2 局所座標の入れ方

$\lambda \in \Lambda$ に対し, λ と横断的な Lagrange 部分空間の全体を $\Lambda^0(\lambda)$ とする. λ' を λ と横断的な Lagrange 部分空間, λ'' を λ' と横断的な Lagrange 部分空間とする. λ'' は λ から λ' へのある線形写像 $T_{(\lambda, \lambda', \lambda'')}$ のグラフと思える. つまり, $z'' \in \lambda''$ に対し,

$$z'' = z + z', \quad z \in \lambda, \quad z' \in \lambda'$$

とすると,

$$z' = T_{(\lambda, \lambda', \lambda'')} z$$

となっている. ここで, 2 次形式を

$$Q_{(\lambda, \lambda', \lambda'')} (y, z) := \sigma(T_{(\lambda, \lambda', \lambda'')} y, z), \quad y, z \in \lambda$$

とすると, $Q_{\lambda\lambda'\lambda''}$ は対称となる. 実際,

$$y'' = y + T_{(\lambda, \lambda', \lambda'')} y, \quad z'' = z + T_{(\lambda, \lambda', \lambda'')} z$$

とすると, λ, λ' が Lagrange 部分空間であるから $\sigma(y, z) = \sigma(y', z') = 0$ が成り立つ. λ'' が Lagrange 部分空間であるから

$$0 = \sigma(y'', z'') = \sigma(T_{\lambda\lambda'\lambda''}y, z) + \sigma(y, T_{\lambda\lambda'\lambda''}z).$$

よって, $\sigma(T_{\lambda\lambda'\lambda''}y, z) = -\sigma(y, T_{\lambda\lambda'\lambda''}z) = \sigma(T_{\lambda\lambda'\lambda''}z, y)$ となる. ここで, σ が歪対称であることを用いた.

逆に, Q を λ 上の対称 2 次形式とすると, ある $T: \lambda \rightarrow \lambda'$ で

$$Q(y, z) = \sigma(Ty, z)$$

となるものが存在する. 問題は T のグラフである. T のグラフは Lagrange 部分空間となる. 実際, $y'' = y + y', z'' = z + z'$ とすると,

$$\begin{aligned} \sigma(y'', z'') &= \sigma(y + Ty, z + Tz) \\ &= \sigma(y, Tz) + \sigma(Ty, z) \\ &= -Q(z, y) + Q(y, z) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる. よって, 1 対 1 の対応

$$\Lambda^0(\lambda') \longleftrightarrow \text{Sym}(\lambda) : \lambda \text{ 上の対称 2 次形式全体}$$

を得る.

以下のような見方をする. $(p, q) = (p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ を $z_j = p_j + iq_j$ として $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ と対応付けることによって, Symplectic ベクトル空間は \mathbb{C}^n と同一視される. このとき, \mathbb{C}^n の Hermite 内積

$$h(z, z') = \bar{z}_1 z'_1 + \dots + \bar{z}_n z'_n$$

について

$$\begin{aligned} \sigma((p, q), (p', q')) &= \text{Im } h(z, z'), \\ g((p, q), (p', q')) &= \text{Re } h(z, z'), \\ \sigma(z, iz') &= g(z, z') \end{aligned}$$

が成り立つ.

定義 3.

\mathbb{C}^n の線形変換 A が Symplectic 変換 $\stackrel{\text{def}}{\iff} \sigma(Az, Az') = \sigma(z, z'), \forall z, z' \in \mathbb{C}^n.$

さらに

$Sp(n) := \mathbb{C}^n$ の Symplectic 変換全体,

$O(2n) := \mathbb{R}^{2n}$ の直交変換全体,

$U(n) := \mathbb{C}^n$ の Unitary 変換全体

とおく.

補題 4. $U(n) = Sp(n) \cap O(2n)$.

証明. $T \in Sp(n) \cap O(2n)$ とすると, 任意の $z, z' \in \mathbb{C}^n$ に対して

$$\sigma(z, iTz') = g(z, Tz') = g(T^{-1}z, z') = \sigma(T^{-1}z, iz') = \sigma(z, Tiz').$$

σ が非退化なので $iTz' = Tiz'$ となり, T は複素の線形変換とみなせる. $h = g + i\sigma$ より結論を得る. \square

Lagrange 部分空間 $\lambda_{\text{Re}}, \lambda_{\text{Im}}$ を

$$\lambda_{\text{Re}} := \{z = p + iq \mid q = 0\}, \quad \lambda_{\text{Im}} := \{z = p + iq \mid p = 0\}$$

で定める. このとき, $\lambda_{\text{Im}} = i\lambda_{\text{Re}}$ となる.

定理 5.

$$\Lambda = \Lambda(n) \cong U(n)/O(n). \quad (\text{位相同型})$$

証明. λ_{Im} について g に関する正規直交基底 e_1, \dots, e_n をとる. これは Hermite 内積 h についても \mathbb{C}^n の正規直交基底である. 任意の $\lambda \in \Lambda$ について g に関する正規直交基底 e'_1, \dots, e'_n をとると, これも h の正規直交基底となっている. ユニタリ変換 $U \in U(n)$ が一意的に決まり e_1, \dots, e_n を e'_1, \dots, e'_n に写す. ゆえに $U(n)$ は Λ に推移的に作用する (任意の λ から任意の λ' への変換が作れる).

$U \in U(n)$ が λ_{Im} を不変にするならば, g が U で保たれることから λ_{Im} の g に関する直交補空間 λ_{Re} も U で不変である. よって, $U \in GL(n, \mathbb{R})$ である. つまり, $U \in O(n)$. 逆に $U \in O(n)$ ならば λ_{Im} を不変とするのは明らか. よって, $O(n)$ は $\lambda_{\text{Im}} \in \Lambda$ の固定部分群である. \square

系 6. $\dim \Lambda(n) = \dim U(n) - \dim O(n) = \frac{n}{2}(n+1)$.

この定理の証明においては, 位相空間 M に推移的に群 G が作用するとき, M は G を固定部分群 H (M を変化させない元) で割ったもの G/H と同相である, という基本的な定理を用いた.

$$\Lambda^k(n) := \{\lambda \in \Lambda(n) \mid \dim \lambda \cap \lambda_{\text{Re}} = k\}$$

とおき, $\lambda \in \Lambda^0(n)$ を $T_{\lambda_{\text{Re}}\lambda_{\text{Im}}\lambda} : \lambda_{\text{Im}} \rightarrow \lambda_{\text{Re}}$ のグラフと見る.

λ_{Im} 上の対称 2 次形式 $Q_{\lambda_{\text{Re}}\lambda_{\text{Im}}\lambda}(z, z') = \sigma(T_{\lambda_{\text{Re}}\lambda_{\text{Im}}\lambda}z, z')$ に対し, \mathbb{R}^n 上の対称 2 次形式 $\tilde{Q}_\lambda(z, z') = Q_{\lambda_{\text{Re}}\lambda_{\text{Im}}\lambda}(iz, iz')$ とすると, ある実対称行列 $S(\lambda)$ について

$$g(z, S(\lambda)z') = \tilde{Q}_\lambda(z, z')$$

と書ける. このとき, $\lambda = \{z = S(\lambda)q + iq \mid q \in \mathbb{R}^n\}$. 実際, $i : \mathbb{R}^n \rightarrow \lambda_{\text{Im}} : q \mapsto iq$ として, $S(\lambda) := T_{\lambda_{\text{Re}}\lambda_{\text{Im}}\lambda}i(\cdot)$ とすると,

$$\sigma(T_{\lambda_{\text{Re}}\lambda_{\text{Im}}\lambda}iq, iq') = \sigma(S(\lambda)q, iq') = g(S(\lambda)q, q').$$

$S(\lambda)$ を $\lambda \in \Lambda^0(n)$ の実対称行列による表示と呼ぶ.

$$\phi: \Lambda^0(n) \rightarrow \text{Sym}(n) : \lambda \mapsto S(\lambda)$$

は $\Lambda(n)$ の λ_{Im} の近傍での局所座標である.

$\Lambda^0(n)$ を平行移動して, $\Lambda(n)$ 全体を覆う近傍系を作る. $K \subset \{1, 2, \dots, n\}$ に対し, $I_K: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, $z' = (z'_1, \dots, z'_n) = I_K z$ を, $z = (z_1, \dots, z_n)$ に対し

$$z'_k = \begin{cases} iz_k, & k \in K, \\ z_k, & k \notin K. \end{cases}$$

で定めると, これは Unitary 変換.

$$\lambda_K := I_K \lambda_{\text{Re}} = \{p + iq \mid k \in K \text{ なら } p_k = 0, k \notin K \text{ なら } q_k = 0\}$$

とする. 特に $\lambda_\emptyset = \lambda_{\text{Re}}$, $\lambda_{\{1, 2, \dots, n\}} = \lambda_{\text{Im}}$ となる.

補題 7. 任意の $\lambda \in \Lambda^k(n)$ に対し, ある $K \in \{1, 2, \dots, n\}$ が存在して, $|K| = k$ かつ λ と λ_K は横断的となる.

証明. $\mu := \lambda \cap \lambda_{\text{Re}}$ とすると, $\dim \mu = k$. $K \subset \{1, 2, \dots, n\}$ に対し, $\tau_K := \lambda_K \cap \lambda_{\text{Re}}$ とすると,

$$\tau_K = \{P_{K^c} = (\dots, p_k, \dots, 0_{k'}, \dots) \mid k \notin K, k' \in K\}$$

となる. よって $\dim_{\mathbb{R}} \tau_K = n - |K|$. 従って, $|K| = k$ となる K で $\tau_K \cap \mu = \{0\}$ となるものがある. この K が求めるものである. 実際, $z \in \lambda \cap \lambda_K$ として, 任意の $z' \in \lambda_{\text{Re}}$ を $z' = z'' + z'''$, $z'' \in \mu$, $z''' \in \tau_K$ と分解すると, $\sigma(z, z') = \sigma(z, z'') + \sigma(z, z''') = 0$. $z' \in \lambda_{\text{Re}}$ は任意なので, $z \in \lambda_{\text{Re}}$. つまり, $z \in \lambda \cap \lambda_K \cap \lambda_{\text{Re}} = \mu \cap \tau_K = \{0\}$. よって $z = 0$. \square

補題 8. I_K は $\Lambda^0(n)$ を $\Lambda^0(\lambda_K) = \{\lambda \in \Lambda(n) \mid \lambda \cap \lambda_K = \{0\}\}$ に写す Symplectic 変換である.

定理 9.

$$\Lambda(n) = \bigcup_{K \subset \{1, 2, \dots, n\}} I_K \Lambda^0(n), \quad \Lambda^k(n) = \bigcup_{|K|=k} I_K \Lambda^0(n)$$

であって, $\phi: \Lambda^0(n) \rightarrow \text{Sym}(n) : \lambda \mapsto S(\lambda)$ とすると

$$\phi_K = \phi \circ I_K^{-1} : \lambda \mapsto S(I_K^{-1} \lambda)$$

が局所座標系となる.

2.3 $\Lambda(2)$ の実現のための準備

$\lambda \in \Lambda(n)$ に対して, $\lambda = U\lambda_{\text{Im}}$ となる $U \in U(n)$ をとり $W(\lambda) := U^t U$ と定める.

補題 10. $W(\lambda)$ は U のとり方によらずに一意に定まる.

証明. $W(\lambda) = U\lambda_{\text{Im}} = U'\lambda_{\text{Im}}$ とすると, 定理 5 より $U' = UT$ となる $T \in O(n)$ が存在する. したがって

$$U'^t U' = UT^t T^t U = U^t U$$

が成り立つ. □

補題 11. $W(\lambda)$ は対称かつ Unitary.

補題 12. $\lambda \in \Lambda(n)$ に対し, $z \in \lambda \iff -z = W(\lambda)\bar{z}$.

証明. $\lambda = U\lambda_{\text{Im}}$ なる $U \in U(n)$ をとる. このとき,

$$\begin{aligned} z \in \lambda &\iff U^{-1}z =: z_0 \in \lambda_{\text{Im}} \iff \bar{z}_0 = -z_0 \\ &\iff W(\lambda)\bar{z} = U^t U \overline{U z_0} = -U z_0 = -z \end{aligned}$$

が成り立つ. □

定理 13. 次の 3 条件は互いに同値である.

- (i) $\lambda \cap \lambda' \neq \{0\}$,
- (ii) $\text{Ker}(W(\lambda')^{-1}W(\lambda) - I) \neq \{0\}$,
- (iii) $\text{Ker}(W(\lambda')W(\lambda)^{-1} - I) \neq \{0\}$.

証明. $\mu = \lambda \cap \lambda'$ とする. 0 でないベクトル $z \in \mu$ が存在するための必要十分条件は

$$-z = W(\lambda)\bar{z}, \quad -z = W(\lambda')\bar{z},$$

が成り立つことであるから,

$$\bar{z} = W(\lambda')^{-1}W(\lambda)\bar{z}$$

が成立し (ii) が成り立つ. 逆に (ii) が成り立つとすると, 上式を満たす 0 でないベクトル z が存在する. よって $w := W(\lambda')\bar{z} = W(\lambda)\bar{z}$ と置くと, $\overline{W(\lambda)} = W(\lambda)^{-1}$ であるから

$$W(\lambda)\bar{w} = W(\lambda)\overline{W(\lambda)}z = z.$$

$z \neq w$ のときは $u = w - z$ とおくと, $u \neq 0$ であり

$$W(\lambda)\bar{u} = W(\lambda)(\bar{w} - \bar{z}) = z - w = -u.$$

したがって $u \in \lambda$ であり, 同様に $u \in \lambda'$ も分かる. $z = w$ のときは $u = iz$ とおくと $W(\lambda)\bar{u} = u$ で $u \in \lambda$ となり同様に $u \in \lambda'$ も分かる. 結果, $u \in \lambda \cap \lambda'$ が成り立ち, (ii) から (i) が示された. (i) と (iii) の同値性は同様にして示される. \square

補題 14. $\Lambda(n) \ni \lambda \mapsto W(\lambda) \in U(n)$ は単射.

証明. $W(\lambda') = W(\lambda)$ なら, $W(\lambda')^{-1}W(\lambda) = I_n$. また, 任意の $\lambda \in \Lambda(n)$ について $-z = W(\lambda)\bar{z}$. このとき $W(\lambda')\bar{z} = -W(\lambda')W(\lambda)^{-1}z = -z$. つまり $z \in \lambda'$. よって, $\lambda = \lambda'$. \square

3 $\Lambda(2)$ について

3.1 $\Lambda(2)$ の geometry

以上の結果を使う. $W(2) = \{W(\lambda) \mid \text{Unitary 対称 } 2 \times 2 \text{ 行列}\}$, $\Lambda(2) \cong W(2)$ である. $W \in W(2)$ を $W = A + iB$ (A, B : 実対称) と分解する. このとき, W が Unitary であるから

$$A^2 + B^2 = I, \quad AB - BA = 0.$$

よって, ある $R \in SO(2)$ が存在して, tRAR と tRBR は対角行列. 従って,

$$A + iB = RD^tR, \quad D = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

と表され, $W(2)$ は $T^2 \times SO(2) \ni (\theta, \phi, R)$ を適当に同一視したものとみなせる.

補題 15. 以下が成り立つ.

(i) D が $\pm I$ 以外の $SO(2)$ の元と可換 $\iff D = \alpha I$.

(ii) D がスカラー行列でないとき, $R_1, R_2 \in SO(2)$ について,

$$R_1 D^t R_1 = R_2 D^t R_2 \iff R_1 = \pm R_2.$$

(iii) $R \in SO(2)$ について,

$$RD^tR \text{ が対角行列} \iff R = \pm I, \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

この補題を用いて $T^2 \times SO(2)$ の元を同一視することで $\Lambda(2)$ を考えることができる. 以下の基本領域 \mathcal{D} を考える (図 7). \mathcal{D} は通常考える基本領域 (図 8) の一部を平行移動したものであることに注意する.

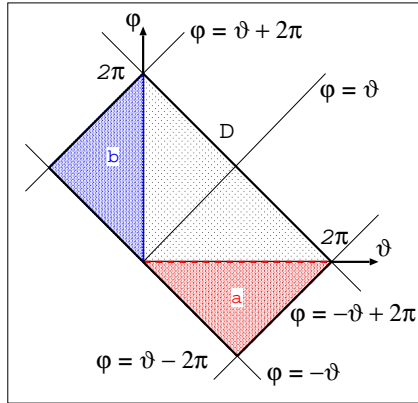


図 7: 基本領域 D

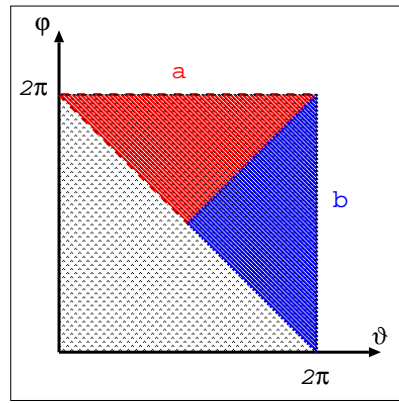


図 8: 通常考える基本領域

この各点の上に $SO(2)$ が乗っている. 補題 15 の (ii) により $R \sim -R$ の同一視により $SO(2)$ は S^1 と見ることができ, $D \times S^1$ を考える (図 9). 補題 15 の (i) により $\phi = \theta, \phi = \theta + 2\pi, \phi = \theta - 2\pi$ で D はスカラー. つまりこれらの直線に沿って, S^1 は 1 点に潰される. 補題 15 の (iii) により (θ, ϕ) 上の S^1 と (ϕ, θ) 上の S_1 は裏返して同一視される (図 10). 以上により, $\{\phi = \theta\} \times S^2$ で $\{\phi = \theta\}$ を原点と (π, π) をつなぎ T^1 にするときに $\{\phi = \theta\}$ 上の S^2 をひっくり返してつなげたものが $W(2)$ であり, $\Lambda(2)$ である. T^1 に沿って何回巻くかという概念が定義でき, $\pi_1(\Lambda(2)) = \mathbb{Z}$ であることが分かる (図 11).

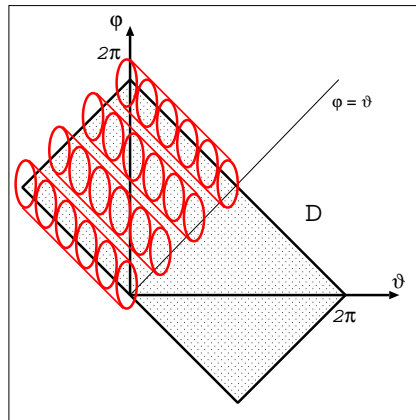


図 9: D の上に S^1 が乗っている. 右下も同様.

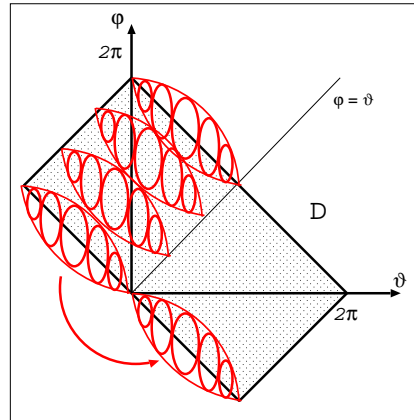


図 10: S^1 が潰れたため $\phi = \theta$ 上で球 S^2 が乗っているようになる. 右下とは反転して同一視されている.

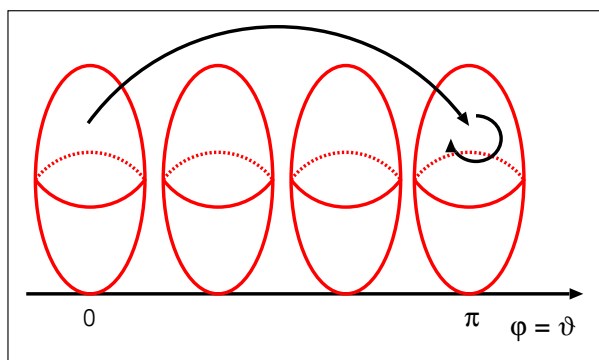


図 11: $\phi = \theta$ の上にある S^2 を端でくっつける. このとき, 反転させて同一視する.

3.2 $\Lambda(2)$ の応用

次の固有値問題を考える.

$$\begin{cases} -u_{xx} = \lambda u, & -1 < x < 1, \\ u_x(-1) = u_x(1) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Hamiltonian

$$H = \frac{1}{2}(v_1^2 + v_2^2) + \frac{\lambda}{2}(u_1^2 + u_2^2)$$

に対する Hamilton 方程式を考え, その解の $x = \pm 1$ での値を考える.

$$L_1 = \left\{ \left(\begin{array}{c} u(-1) \\ u(1) \\ -u_x(-1) \\ u_x(1) \end{array} \right) \in \mathbb{R}^4 \mid -u_{xx} = \lambda u \right\}$$

とおくと, これは Lagrange 部分空間である.

$$N = \left\{ \left(\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) \in \mathbb{R}^4 \mid u_1, u_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

と定める. このとき, λ が (5) の固有値であることは $L_1 \cap N \neq \{0\}$ と同値である. $0 \leq \rho < 1$ に対し,

$$\begin{cases} -u_{xx} = \lambda u, & -\rho < x < \rho, \\ u_x(-\rho) = u_x(\rho) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

を考える。(6) は座標変換 $x = \rho\xi$ によって

$$\begin{cases} -u_{\xi\xi} = \rho^2 \lambda u, & -1 < x < 1, \\ u_{\xi}(-1) = u_{\xi}(1) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

に変換され、従って、

$$L_{\rho} = \left\{ \left(\begin{array}{c} u(-1) \\ u(1) \\ -u_{\xi}(-1) \\ u_{\xi}(1) \end{array} \right) \in \mathbb{R}^4 \mid -u_{\xi\xi} = \rho^2 \lambda u \right\}$$

とおくと、 $\rho^2 \lambda$ が (7) の固有値であることは $L_{\rho} \cap N \neq \{0\}$ と同値になる。 $D = \{L \in \Lambda(2) \mid L \cap N \neq \{0\}\}$ を N の train と呼ぶ。

$$p_1 = \frac{u_1 + u_2}{\sqrt{2}}, \quad p_2 = \frac{u_1 - u_2}{\sqrt{2}}, \quad q_1 = \frac{v_1 + v_2}{\sqrt{2}}, \quad q_2 = \frac{v_1 - v_2}{\sqrt{2}},$$

$$z = (p_1 + iq_1, p_2 + iq_2) \in \mathbb{C}^2$$

とおく。任意の $L \in \Lambda(2)$ に対し $L = U \lambda_{\text{Im}}$ なる $U \in U(2)$ をとり、 $W = U^t U \in W(2)$ を考えれば、3.1 節で見たようにこの対応 $L \mapsto W$ は同型 $\Lambda(2) \cong W(2)$ を与える。

λ_0 での (5) の固有関数を u_0 とする。 $-u_{0xx} = \lambda u_0$ を x で微分して

$$-(u_{0x})_{xx} = \lambda u_{0x}.$$

従って、 $u'_0(\rho\xi)$ ($' = \frac{d}{dx}$) は $-u_{\xi\xi} = \rho^2 \lambda_0 u$ を満たす。

$$\lim_{\rho \downarrow 0} \frac{u_0(-\rho) + u_0(\rho)}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} u_0(0) > 0, \quad \lim_{\rho \downarrow 0} \frac{-u_{0\xi}(-\rho) + u_{0\xi}(\rho)}{\sqrt{2}} = 0,$$

$$\lim_{\rho \downarrow 0} \frac{u'_0(-\rho) - u'_0(\rho)}{\sqrt{2}\rho} = \lim_{\rho \downarrow 0} \frac{-u'_{0\xi}(-\rho) - u'_{0\xi}(\rho)}{\sqrt{2}\rho} = -\sqrt{2} u''_0(0) > 0$$

であるから、 ρ が 0 から 1 まで動くとき

$$\arg \left\{ \frac{u_0(-\rho) - u_0(\rho)}{\sqrt{2}} + i \frac{-u_{0\xi}(-\rho) + u_{0\xi}(\rho)}{\sqrt{2}} \right\}$$

は 0 から $-\pi$ まで、

$$\arg \left\{ \frac{u'_0(-\rho) - u'_0(\rho)}{\sqrt{2}\rho} + i \frac{-u'_{0\xi}(-\rho) - u'_{0\xi}(\rho)}{\sqrt{2}\rho} \right\}$$

は $\pi/4$ から $-\pi/2$ まで動く。

L_{ρ} の基底として

$$\left(\begin{array}{c} \frac{u_0(-\rho) + u_0(\rho)}{\sqrt{2}} \\ \frac{u_0(-\rho) - u_0(\rho)}{\sqrt{2}} = 0 \\ \frac{-u_{0\xi}(-\rho) + u_{0\xi}(\rho)}{\sqrt{2}} \\ \frac{-u_{0\xi}(-\rho) - u_{0\xi}(\rho)}{\sqrt{2}} = 0 \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{c} \frac{u'_0(-\rho) + u'_0(\rho)}{\sqrt{2}\rho} = 0 \\ \frac{u'_0(-\rho) - u'_0(\rho)}{\sqrt{2}\rho} \\ \frac{-u'_{0\xi}(-\rho) + u'_{0\xi}(\rho)}{\sqrt{2}\rho} = 0 \\ \frac{-u'_{0\xi}(-\rho) - u'_{0\xi}(\rho)}{\sqrt{2}\rho} \end{array} \right)$$

をとる。このとき

$$L_\rho = U(\rho)\lambda_{1m}, \quad U(\rho) = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1(\rho)} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2(\rho)} \end{pmatrix}$$

と書ける。 θ_1, θ_2 の増減表は

ρ	0	→	1
θ_1	$\frac{3}{2}\pi$	→	$\frac{\pi}{2}$
θ_2	$\frac{7}{4}\pi$	→	π

となる。よって

$$U(\rho)^t U(\rho) = \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1(\rho)} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_2(\rho)} \end{pmatrix}.$$

と書けば、 φ_1, φ_2 の増減表は

ρ	0	→	1
φ_1	π	→	$-\pi$
φ_2	$\frac{3}{2}\pi$	→	0

これを図示すると図 12 のようになる。従って、ある $\rho^* \in (0, 1)$ が存在して、(7) は固有値 $(\rho^*)^2 \lambda_0$ を持つ。

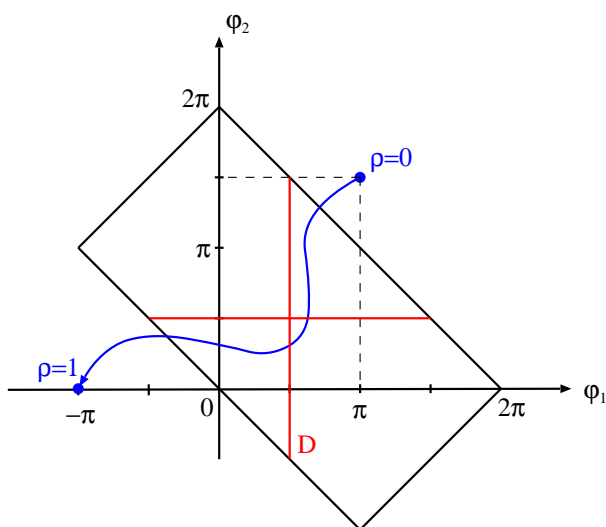


図 12: $(\varphi_1(\rho), \varphi_2(\rho))$ の軌跡

4 n 次元 Lagrange-Graßmann 多様体

4.1 準備

ファイバーバンドル, ホモトピー群, 相対ホモトピー群について, 定義と基本的な性質を述べる.

定義 16 (位相群). G を群かつ位相空間とする. G が位相群であるとは, 写像 $G \times G \rightarrow G : (g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$ および $G \rightarrow G : g \mapsto g^{-1}$ が連続となることをいう.

定義 17. G を位相群, Y を位相空間, $\eta : G \times Y \rightarrow Y$ を連続写像とする. G が (η に関する) Y の位相変換群である, または G が Y に作用しているとは, 次の 2 つの条件が成り立つことをいう.

- (i) 任意の $y \in Y$ に対し, $\eta(e, y) = y$. ここで $e \in G$ は単位元を表す.
- (ii) 任意の $g_1, g_2 \in G, y \in Y$ に対し, $\eta(g_1 g_2, y) = \eta(g_1, \eta(g_2, y))$.

以下では $\eta(g, y)$ を $g \cdot y$ と書く.

定義 18. G を位相空間 Y の位相変換群とする. G の Y への作用が効果的であるとは, $g \cdot y = y$ が任意の $y \in Y$ で成り立つような $g \in G$ は $g = e$ のみであることをいう. 以下では G は Y に効果的に作用しているとする.

定義 19 (ファイバーバンドル). 次の条件を満たす 5 つ組 $\mathcal{B} = (B, p, X, Y, G)$ をファイバーバンドルと呼ぶ.

- 1) B, X は位相空間, $p : B \rightarrow X$ は連続全射である. B を全空間, X を底空間, p を射影と呼ぶ.
- 2) Y は位相空間, G は Y の位相変換群である. Y をファイバー, G を構造群と呼ぶ.
- 3) $\{V_j \mid j \in J\}$ を X の開被覆, $\phi_j : V_j \times Y \rightarrow p^{-1}(V_j)$ を同相写像とする. V_j を座標近傍, ϕ_j を座標関数と呼ぶ.
- 4) (i) 任意の $j \in J, x \in X, y \in Y$ について $p \circ \phi_j(x, y) = x$ が成り立つ.
(ii) $j \in J, x \in X$ に対して $\phi_{j,x} : Y \rightarrow p^{-1}(x) : y \mapsto \phi_j(x, y)$ とおく. このとき, $x \in V_i \cap V_j$ に対して $g_{j,i} \in G$ で $\phi_{j,x}^{-1} \circ \phi_{i,x} = \eta(g_{j,i}, \cdot) : Y \rightarrow Y$ なるものが存在する.
(iii) $g_{j,i} : V_i \cap V_j \rightarrow G$ は連続. $g_{j,i}$ を \mathcal{B} の座標変換と呼ぶ.

例 20 (メビウスの輪). $X = S^1, Y = [-1, 1]$ とし, B および $p : B \rightarrow X$ を図 13 のものとする. X の開被覆 $\{V_1, V_2\}$ を図 14 のように定める. $G = \mathbb{Z}_2 = \{e, g\}$ (ただし $g^2 = e$) とし, 離散位相によって位相群とみなす. G の Y への作用

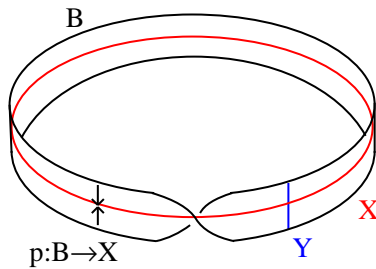


図 13: メビウスの輪

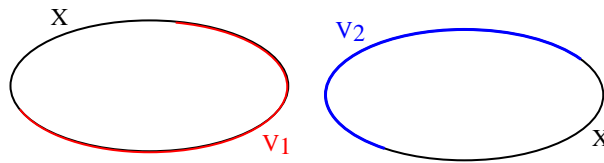


図 14: X の開被覆 $\{V_1, V_2\}$

を, $y \in Y$ に対し $e \cdot y = y, g \cdot y = -y$ で定める. $x \in V_1 \cap V_2$ が一方の連結成分に含まれるとき $g_{1,2} = e$, 他方の連結成分に含まれるとき $g_{1,2} = g$ と定める. すなわち, $V_1 \times Y$ と $V_2 \times Y$ の二つの交わりを, 一方はそのまま同一視し, 他方は逆向きに張り合わせる. このようにしてできるファイバーバンドルをメビウスの輪という.

定理 21. B を Lie 群, G を B の閉部分群とすると, 商射 $p: B \rightarrow B/G$ は B を全空間, G をファイバーかつ構造群, B/G を底空間とするファイバーバンドルとみなせる.

例 22. $\Lambda(n) \cong U(n)/O(n)$ より, $U(n)$ は $\Lambda(n)$ 上の $O(n)$ を構造群とするファイバーバンドルである.

定義 23 (ホモトピー群). X を位相空間とし, $x_0 \in X$ を固定する. $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ とおく. 連続写像 $\varphi: I^n \rightarrow X$ で $\varphi(\partial I^n) = x_0$ となるものの全体を $\Pi_n(X)$ とする. $\varphi_1, \varphi_2 \in \Pi_n(X)$ に対して, 連続写像 $H: I^n \times [0, 1] \rightarrow X$ で

$$H((\partial I^n) \times [0, 1]) = x_0, \quad H(\cdot, 0) = \varphi_1, \quad H(\cdot, 1) = \varphi_2$$

を満たすものが存在するとき $\varphi_1 \sim \varphi_2$ と書く. \sim は $\Pi_n(X)$ 上の同値関係となり, これによる商集合 $\pi_n(X) = \Pi_n(X) / \sim$ を n 次元ホモトピー群と呼ぶ. $\pi_n(X)$ は図 15 の演算について群をなす. $\pi_1(X)$ を基本群と呼ぶ.

注意 24. $n \geq 2$ では $\pi_n(X)$ は可換である. 実際, 図 16 の写像を H とすれば

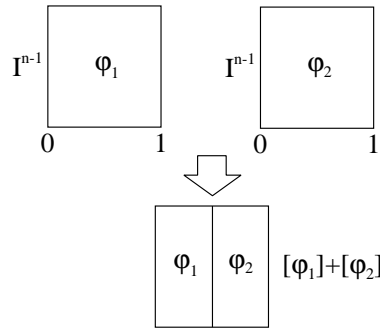


図 15: $\pi_n(X)$ の群構造

よい。ただし、斜線の部分は x_0 への定値写像を表している。一般には $\pi_1(X)$ は非可換である。

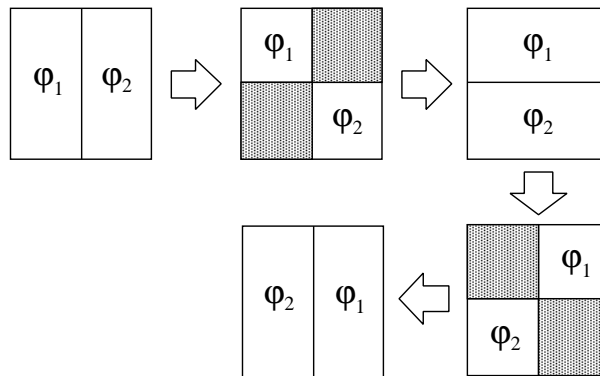


図 16: $\pi_n(X)$ ($n \geq 2$) の可換性

定義 25 (相対ホモトピー群). $A \subset X$, $x_0 \in A$ とする. $I' = \overline{I^n - I^{n-1} \times \{0\}}$ について, 連続写像 $\varphi: I^n \rightarrow X$ で $\varphi(I') = x_0$, $\varphi(I^{n-1} \times \{0\}) \subset A$ を満たすものの全体を $\Pi_n(X, A, x_0)$ と書き, ホモトピー群の定義と同様に $\Pi_n(X, A, x_0)$ 上の同値関係 \sim を定める.

$$\pi_n(X, A, x_0) = \Pi_n(X, A, x_0) / \sim$$

を相対ホモトピー群 (または空間対のホモトピー群) と呼ぶ.

定義 26. 群準同型の列

$$\longrightarrow X_{n+1} \xrightarrow{f_n} X_n \xrightarrow{f_{n-1}} X_{n-1} \longrightarrow$$

が完全であるとは, すべての n について $\text{Ker } f_{n-1} = \text{Im } f_n$ となることをいう.

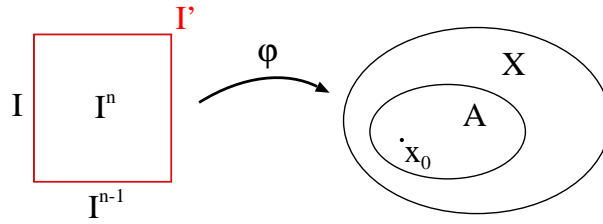


図 17: 相対ホモトピー群

定理 27. 以下の写像の列は完全 (相対ホモトピー完全系列)

$$\longrightarrow \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{p} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0) \longrightarrow .$$

ここで,

- i_* は $i: A \hookrightarrow X$ から定まる写像,
- p は $\varphi: I^n \rightarrow X$, $\varphi(\partial I^n) = x_0$ を $\varphi(I') = x_0$, $\varphi(I^{n-1} \times \{0\}) \subset A$ と思うことで得られる写像,
- ∂ は $\varphi: I^n \rightarrow X$, $\varphi(I') = x_0$, $\varphi(I^{n-1} \times \{0\}) \subset A$ を $I^{n-1} \times \{0\}$ に制限することで得られる写像 $\varphi|_{I^{n-1} \times \{0\}}$ において, $I^{n-1} \times \{0\}$ を I^{n-1} と同一視することによってこれを I^{n-1} から A への写像とみることによって $\varphi|_{I^{n-1}} \in \Pi_{n-1}(A, x_0)$ とみなすことで得られる写像,

である.

ファイバーバンドル $\mathcal{B} = (B, p, X, Y, G)$ について, $x_0 \in X$ とし $p^{-1}(x_0)$ を Y と同一視する. $y_0 \in Y$ を固定する. 相対ホモトピー完全系列より

$$\longrightarrow \pi_n(Y, y_0) \longrightarrow \pi_n(B, y_0) \longrightarrow \pi_n(B, Y, y_0) \longrightarrow \pi_{n-1}(Y, y_0) \longrightarrow .$$

また,

$$\pi_n(B, Y, y_0) \cong \pi_n(X, x_0, x_0) = \pi_n(X, x_0).$$

これよりファイバー空間のホモトピー完全系列

$$\longrightarrow \pi_n(Y) \longrightarrow \pi_n(B) \longrightarrow \pi_n(X) \longrightarrow \pi_{n-1}(Y) \longrightarrow$$

が得られる.

4.2 $\Lambda(n)$ の基本群

$\text{Det}^2 \lambda := \det W(\lambda)$ として $S\Lambda(n) := \{\lambda \in \Lambda(n) \mid \text{Det}^2 \lambda = 1\}$ とおくと $S\Lambda(n) = SU(n)/SO(n)$ となる. これより次のファイバーバンドルの可換図式が得られる.

$$\begin{array}{ccccc}
 SO(n) & \longrightarrow & O(n) & \xrightarrow{\det} & S^0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 SU(n) & \longrightarrow & U(n) & \xrightarrow{\det} & S^1 \ni e^{i\theta} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 S\Lambda(n) & \longrightarrow & \Lambda(n) & \xrightarrow{\text{Det}^2} & S^1 \ni e^{2i\theta}
 \end{array}$$

ファイバー空間のホモトピー完全系列より次が得られる.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \longrightarrow & \pi_1(SO(n)) & \longrightarrow & \pi_1(O(n)) = 0 & \longrightarrow & \pi_1(S^0) & \longrightarrow \pi_0(SO(n)) \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 \longrightarrow & \pi_1(SU(n)) = 0 & \longrightarrow & \pi_1(U(n)) \cong \mathbb{Z} & \longrightarrow & \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} & \longrightarrow \pi_0(SU(n)) \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 \longrightarrow & \pi_1(S\Lambda(n)) & \longrightarrow & \pi_1(\Lambda(n)) & \longrightarrow & \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} & \longrightarrow \pi_0(S\Lambda(n)) = 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 \longrightarrow & \pi_0(SO(n)) = 0 & \longrightarrow & \pi_0(O(n)) \cong \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & \pi_0(S^0) &
 \end{array}$$

1 列目の完全性より $\pi_1(S\Lambda(n)) = 0$. 従って, 3 行目の完全性より $\pi_1(\Lambda(n)) \cong \mathbb{Z}$ となる. 以上より, $\Lambda(n)$ の基本群が \mathbb{Z} と同型になることがわかった.